Exercice 56

Déterminer une équation cartésienne du plan P défini par le point $A(-2;0;3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(-1;2;0)$ et $\vec{v}(-2;-3;1)$.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(2\cdot 1 - 0\cdot(-3)) - \vec{j}\,(-1\cdot 1 - 0\cdot(-2)) + \vec{k}\,(-1\cdot(-3) - 2\cdot(-2))$$

$$= 2\vec{i} - (-1)\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal de P

P admet une équation cartésienne de la forme:

$$2x + y + 7z + d = 0, \quad d \in \mathbb{R}$$

$$A \in P \iff 2\cdot(-2) + 0 + 7\cdot 3 + d = 0$$

$$\iff d = -17$$

D'où $P \equiv 2x + y + 7z - 17 = 0$

Exercice 57

Déterminer une équation cartésienne du plan P défini par le point $A(-1;2;5)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(-2-0) - \vec{j}\,(2-0) + \vec{k}\,(1-0)$$

$$= -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal de P.

Donc P admet une équation cartésienne de la forme :

$$-2x - 2y + z + d = 0 \quad , d \in \mathbb{R}$$

$A \in R \Leftrightarrow -2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 + 5 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = -3$

D'où $P \equiv -2x - 2y + z - 3 = 0$

Exercice 58

On considère les points $A(1;1;4)$, $B(-1;1;0)$, $C(-1;0;1)$ et $D(1;0;5)$.

1) Vérifier que $ABCD$ est un parallélogramme.
2) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$.
3) En déduire l'aire de ce parallélogramme $ABCD$.

1) $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

D'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $ABCD$ est un parallélogramme.

2) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-4) - j(-2) + \vec{k}(2)$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3) $\mathcal{A}_{ABCD} = \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \|$

$$= \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 2^2} \text{ u.a.}$$

$= 2\sqrt{6}$ u.a.

Exercice 59

On considère les points $A(-1; 1; 2)$, $B(0; 1; 1)$ et $C(1; 0; 3)$. Calculer l'aire du triangle ABC de deux façons différentes :

1) en calculant d'abord : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2) en calculant d'abord : $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\ldots}$.

1) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1\vec{i} - 3\vec{j} - 1\vec{k}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} \text{ u.a.}$$

$$= \frac{\sqrt{11}}{2} \text{ u.a}$$

2) $$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (0+1)\vec{i} - (-1-2)\vec{j} + (1-0)\vec{k}$$

$$= \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}$$

$$= \frac{\sqrt{11}}{2} \text{ u.a.}$$

Exercice 61

On considère la droite $d : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 1 \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1) Justifier que le point $A(1; 0; 1)$ n'appartient pas à *d*.
2) *R* est le plan passant par *A* et contenant *d*. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan *R*.

1) $A \in d \iff \exists t \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} 1 = 2t - 1 \\ 0 = t + 1 \\ 1 \neq 2 \end{cases}$ impossible !

Donc $A \notin d$

2) $B(-1;1;2) \in d$, donc $B \in R$

$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Comme $A \notin d$, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires

Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}$ est un vecteur normal à R

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(1\cdot 0 - 1\cdot 1) - \vec{j}\,(-2\cdot 0 - 1\cdot 2) - \vec{k}\,(-2\cdot 1 - 1\cdot 2)$$
$$= -\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à R.

Exercice 62

On considère les deux plans :

$P_1 : x - y - 2 = 0$

$P_2 : 2x - y + z = 0$

Déterminer une équation du plan P_3 passant par l'origine du repère et contenant la droite d'intersection des plans P_1 et P_2.

$M(x;y;z) \in P_1 \cap P_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-2=0 & ① \\ 2x-y+z=0 & ② \end{cases}$$

① : $x = y+2$

Dans ② : $2(x+y)-y+z=0 \Leftrightarrow 2y+4-y+z=0$

$\Leftrightarrow z=-y-4$

Posons : $y=t$, $t\in\mathbb{R}$, alors

$$P_1 \cap P_2 \equiv \begin{cases} x=t+2 \\ y=t \\ z=-t-4 \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite, donc aussi de P_3.

$A(2;0;-4)$ appartient à cette droite, donc aussi à P_3

$O \in P_1 \cap P_2$ $\quad \begin{cases} 0=t+2 \\ 0=t \\ 0=-t-4 \end{cases}$ n'admet pas de solution

Donc O n'appartient pas à cette droite. $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires. $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{u}$ sont des vecteurs directeurs de P_3 et $\overrightarrow{OA}\wedge\vec{u}$ est un vecteur normal à P_3.

$$\overrightarrow{OA}\wedge\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(0\cdot(-1)-(-4)\cdot 1\right)-\vec{j}\left(2\cdot(-1)-(-4)\cdot 1\right)+\vec{k}\left(2\cdot 1-0\cdot 1\right)$$

$$= 4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$$

$$= \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$$

Donc $\overrightarrow{OA}\wedge\vec{u}$ est un vecteur normal du P_3. Soit $\overrightarrow{OA}\wedge\vec{u}=\vec{n_3}$.

Soit $M(x;y;z) \in P_3$, donc :

$$\vec{AM} \cdot \vec{n_3} = 0 \iff (x-2)\cdot 4 + (y-0)\cdot(-2) + (z+4)\cdot 2 = 0$$
$$\iff 4x \cancel{-8} - 2y + 2z \cancel{+8} = 0 \quad \Big|\cdot \tfrac{1}{2}$$
$$\iff 2x - y + z = 0$$

Exercice 63

On donne les quatre points $A(1;0;-1)$, $B(-3;2;1)$, $C(-1;2;3)$ et $D(3;0;2)$.

1) Vérifier que les points *A*, *B* et *C* définissent un plan.
2) Déterminer une équation cartésienne du plan (*ABC*).
3) Vérifier que le point *D* n'appartient pas au plan (*ABC*).
4) Déterminer une représentation paramétrique de la droite *d* passant par *D* et perpendiculaire à (*ABC*).
5) Déterminer les coordonnées du point d'intersection *H* de cette droite *d* et du plan (*ABC*). En déduire la distance du point *D* au plan (*ABC*).

1) vecteur directeur de (AB) : $\vec{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$

vecteur directeur de (AC) : $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

colinéaire ?

(AB) et (AC) sont colinéaires $\iff \exists k \in \mathbb{R} \mid \vec{AB} = k\cdot\vec{AC}$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \;\Big|\; \begin{cases} -4 = k\cdot(-2) & ① \\ 2 = k\cdot 2 & ② \\ 2 = k\cdot 4 & ③ \end{cases}$$

$① \iff k = 2$

Dans ② $2 \neq 2\cdot 2 = 4$

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, A, B et C définissent donc un plan (ABC).

2) Comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal de (ABC)

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (2\cdot 4 - 2\cdot 2)\vec{i} - (-4\cdot 4 + 2\cdot 2)\vec{j} + (-4\cdot 2 + 2\cdot 2)\vec{k}$$

$$= 4\vec{i} + 12\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (ABC).

$(ABC) : 4x + 12y - 4z + d = 0 \quad , d \in \mathbb{R}$

Comme : $A \in (ABC) \Leftrightarrow 4\cdot 1 + 12\cdot 0 - 4\cdot(-1) = d$

$\Leftrightarrow d = 8$

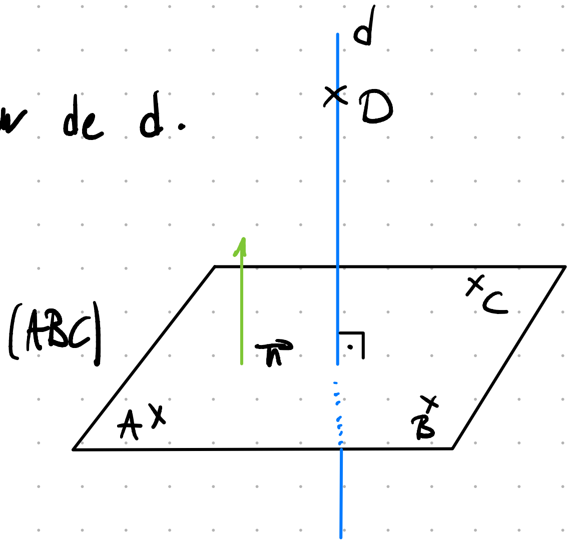
Donc $(ABC) \equiv 4x + 12y - 4z + 8 = 0$

3) $d \in (ABC) \Leftrightarrow 4\cdot 3 + 12\cdot 0 - 4\cdot 2 + 8 \stackrel{?}{=} 0$

$\Leftrightarrow 4 \neq 0$!

Donc $d \notin (ABC)$

4) $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.



$$d \equiv \begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = 12t \\ z = -4t + 2 \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

5)

$H(x;y;z) \in (ABC) \cap d$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+12y-4z-8=0 & ① \\ x=3+4t & ② \\ y=12t & ③ \\ z=2-4t & ④ \end{cases}$$

②, ③ et ④ dans ① :

$$4(3+4t)+12\cdot 12t-4(2-4t)-8=0$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{44}$$

Dans ② : $x=3+4\cdot\frac{1}{44}=\frac{34}{11}$

Dans ③ : $y=12\cdot\frac{1}{44}=\frac{3}{11}$

Dans ④ : $z=2-4\cdot\frac{1}{44}=\frac{21}{11}$

Donc $H\left(\frac{34}{11};\frac{3}{11};\frac{21}{11}\right)$

$$\text{dist}(D;(ABC)) = \|\overrightarrow{DH}\|$$

$$=\sqrt{\left(\frac{34}{11}\right)^2+\left(\frac{3}{11}\right)^2+\left(\frac{21}{11}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{11}}{11}$$

Exercice 64

On donne les points $A(1;-1;2)$ et $B(2;0;4)$ et le plan $P : 2x-3y+z-1=0$.

1) Vérifier que la droite (*AB*) n'est pas perpendiculaire au plan *P*.
2) Déterminer un vecteur normal au plan noté *Q* qui contient la droite (*AB*) et qui est perpendiculaire à *P*.
3) Déterminer une équation cartésienne de ce plan *Q*.

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB)

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

$\vec{AB}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires, donc (AB) n'est pas perpendiculaire à P.

2) Le plan Q contient (AB) et est perpendiculaire à P, donc Q est dirigé par les vecteurs non colinéaire $\vec{AB}$ et $\vec{n}$

$$\vec{AB} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(1\cdot 1 - 2\cdot(-3)) - \vec{j}\,(1\cdot 1 - 2\cdot 2) + k(1\cdot(-3) - 1\cdot 2)$$

$$= 7\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Donc $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q.

3) Q admet une équation cartésienne de la forme :

$$7x + 3y - 5z + d = 0 \quad , \; d \in \mathbb{R}$$

$$A \in Q \iff 7\cdot 1 + 3\cdot(-1) - 5\cdot 2 + d = 0$$

$$\iff d = 6$$

D'où $Q \equiv 7x + 3y - 5z + 6 = 0$

Exercice 65

On donne les points $A(1; 1; 1)$ et $B(2; -1; 0)$ et le plan $P : x - y + 3z - 4 = 0$.

1) Vérifier que la droite (*AB*) n'est pas perpendiculaire au plan *P*.
2) Déterminer un vecteur normal du plan qui est perpendiculaire à *P* et qui contient les points *A* et *B*.

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB)

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

$\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires, donc (AB) n'est pas perpendiculaires à P.

2) $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$

$= \left((-2)\cdot 3 - (-1)\cdot(-1)\right)\vec{i} - \left(1\cdot 3 + 1\cdot 1\right)\vec{j} + \left(1\cdot(-1) - 1\cdot(-2)\right)\vec{k}$

$= -7\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$

D'où : $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n} = \begin{pmatrix}-7\\-4\\1\end{pmatrix}$

<u>Exercice 66 (examen mai 2014)</u>

On donne les points $A(1;2;3)$ et $B(-1;3;5)$ et le plan $P : 2x + y - z + 3 = 0$.

1) Vérifier que la droite (*AB*) n'est pas perpendiculaire au plan *P*.
2) Déterminer un vecteur normal au plan noté *Q* qui contient la droite (*AB*) et qui est perpendiculaire à *P*.
3) Déterminer une équation cartésienne de ce plan *Q*.

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB)

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

$\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires, donc (AB) n'est pas perpendiculaire à P.

2)

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(1\cdot(-1) - 1\cdot 2\right) - \vec{j}\left(2\cdot 1 - 2\cdot 2\right) + \vec{k}\left(-2\cdot 1 - 2\cdot 1\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

D'où : $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

3) Q admet une équation cartésienne de la forme :

$$Q \equiv -3x + 2y - 4z + d = 0 \quad , \ d \in \mathbb{R}$$

$$A \in Q \iff -3\cdot 1 + 2\cdot 2 - 4\cdot 3 + d = 0$$
$$\iff d = 11$$

Donc : $Q \equiv -3x + 2y - 4z + 11 = 0$

Exercice 67 (examen mai 2014)

On donne les quatre points $A(1;-3;2)$, $B(2;-1;1)$, $C(1;-2;4)$ et $D(3;-2;5)$.

1) Vérifier que les points *A*, *B* et *C* définissent un plan.
2) Déterminer une équation cartésienne du plan (*ABC*).

3) Calculer l'aire du triangle *ABC*.
4) Vérifier que le point *D* n'appartient pas au plan (*ABC*).
5) Déterminer une représentation paramétrique de la droite *d* passant par *D* et perpendiculaire à (*ABC*).
6) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal *H* de *D* sur le plan (*ABC*).
7) En déduire la distance du point *D* au plan (*ABC*).

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \neq k\cdot\overrightarrow{AC}$, $k\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés et ces 3 points définissent un plan.

2) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (ABC)

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \vec{i}\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{vmatrix}$$

$$= 5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$= \begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$$

(ABC) admet alors une équation cartésienne de la forme

$$5x - 2y + z + d = 0 \quad , d\in\mathbb{R}$$

$$A\in(ABC) \iff 5\cdot 1 - 2\cdot(-3) + 2 + d = 0$$

$$\iff d = -13$$

D'où $(ABC) \equiv 5x - 2y + z - 11 = 0$

3) $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2+2^2+1^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{30}$$

4) $D\in(ABC)$?

$$5\cdot 3 - 2\cdot(-2) + 5 - 13 = 11 \quad (\neq 0)$$

$D\notin(ABC)$

5) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de d, d'où :

$$d \equiv \begin{cases} x = 5t+3 \\ y = -2t-2 \\ z = t+5 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

6) $(ABC) \cap d = \{H\}$

$$M(x;y;z) \in (ABC) \cap d \iff \begin{cases} x = 5t+3 & (1) \\ y = -2t-2 & (2) \\ z = t+5 & (3) \\ 5x-2y+z-13=0 & (4) \end{cases}$$

(1), (2) et (3) dans (4):

$$5(5t+3)-2(-2t-2)+t+5-13=0$$
$$\iff t = -\frac{11}{30}$$

D'où : $\begin{cases} x = 5\cdot\left(-\frac{11}{30}\right)+3 = \frac{7}{6} \\ y = -2\left(-\frac{11}{30}\right)-2 = -\frac{19}{15} \\ z = -\frac{11}{30}+5 = \frac{139}{30} \end{cases}$

Donc : $H\left(\frac{7}{6}; -\frac{19}{15}; \frac{139}{30}\right)$

7) $\|\overrightarrow{DH}\| = \sqrt{\left(-\frac{11}{9}\right)^2+\left(\frac{11}{15}\right)^2+\left(-\frac{11}{36}\right)^2}$

$$= \frac{11\sqrt{30}}{30}$$

La distance est $\frac{11\sqrt{30}}{30}$ u.l.